Ex.20 解: 设λ 是对称矩阵A 的特征值, x 是矩阵A 的属于特征值λ 的特征向量, 则$Ax=\lambda x$. 由于$A^2=E$ 得

$$A(Ax)=A(\lambda x)\Rightarrow A^2x=\lambda(Ax)\overset{A^2=E}{\Longrightarrow} x=\lambda^2 x\overset{x\neq 0}{\Longrightarrow}\lambda^2-1=0.$$

解之得$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$, 即矩阵A 的特征值只能是1 或-1, 这说明-2 不可能是矩阵A 的特征值, 所以, $A+2E$ 是可逆矩阵.

解法二: 由$A^2=E$ 得$(A+E)(A-E)=0$, 所以, $|A+E|=0$ 或者$|A-E|=0$, 即矩阵A 的特征值只能是1 或-1, 这说明-2 不可能是矩阵A 的特征值, 所以, $A+2E$ 是可逆矩阵.

说明: 设λ 是对称矩阵A 的特征值, x 是矩阵A 的属于特征值λ 的特征向量, 则$Ax=\lambda x$, 于是,

$$\begin{aligned}(A+E)(A-E)=0 \quad &\Rightarrow (A+E)(A-E)x=0\\ &\Rightarrow (A+E)(Ax-x)=0\\ &\Rightarrow (A+E)((\lambda-1)x)=0\\ &\Rightarrow (\lambda-1)(A+E)x=0\\ &\Rightarrow (\lambda-1)(Ax+x)=0\\ &\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)x=0\\ &\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0.\end{aligned}$$